ANNEE 1981

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures - Coefficient : 7)

---==oOOo==----

Les deux problèmes sont indépendants

PROBLEME I

1°) a) En utilisant la formule de MOIVRE, démontrer l'égalité :

$$\frac{\sin (2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = C_{2n+1}^{1} \cot g^{2n} x - C_{2n+1}^{3} \cot g^{2n-2} x + \ldots + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1}$$

(pour $\sin x \neq 0$)

b) Quels sont les zéros de l'équation :

$$C_{2n+1}^{1} X^n - C_{2n+1}^{3} X^{n-1} + \ldots + (-1)^n C_{2n+1}^{2n+1} = 0 \ ?$$

c) En utilisant la relation donnant la somme des zéros d'un polynôme, donner la valeur des deux sommes :

$$\sum_{p=1}^{n} \cot g^2 \frac{p\pi}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n+1}}$$

2°) Montrer que pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\quad \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$

En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$ et la limite S de S_n pour n infini.

3°) Montrer que $T = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \frac{S}{2}$ et $U = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3\,S}{4}$

PROBLEME II

On pourra utiliser, sans avoir à la justifier, la formule généralisée des accroissements finis :

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

On suppose de plus $g(a) \neq g(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

On considère la fonction $f_\alpha(x)$ application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto f_\alpha(x) = e^{-x^\alpha} \int_0^x e^{t^\alpha}\, dt, \text{ où } \alpha \text{ est un élément de } \mathbb{N}^*$$

1°) Montrer que f_α est de classe infinie (c'est-à-dire est indéfiniment dérivable) et vérifie une équation différentielle linéaire du 1er ordre que l'on formera.

2°) Donner le développement en série entière de $f_\alpha(x)$ en admettant que $f_\alpha(x)$ est développable au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série ?

3°) On considère les deux fonctions auxiliaires :

$$g_\alpha(x) = \int_0^x e^{t^\alpha}\,dt \quad \text{et} \quad h_\alpha(x) = \frac{e^{x^\alpha}}{\alpha . x^{\alpha-1}}$$

Montrer que le rapport des dérivées de ces deux fonctions tend vers 1, quand x tend vers + ∞.

En déduire la limite du rapport de ces deux fonctions dans les mêmes conditions.

A quelle fonction simple est équivalente $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers + ∞.

4°) La fonction $k_\alpha(x) = h_\alpha(x) . f'_\alpha(x)$ est monotone décroissante sur $]0, +\infty[$

Démontrer cette propriété et en déduire que $f'_\alpha(x)$ admet un zéro unique pour $\alpha \geqslant 2$ et $x > 0$

5°) Donner dans un même repère l'allure des graphes de $f_\alpha(x)$ suivant les valeurs de α.

6°) On considère les deux séries numériques de terme général :

$$u_n = f_\alpha(n) \quad ; \quad v_n = f_\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \alpha \in \mathbb{N}^*, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la convergence de ces deux séries suivant les valeurs de α.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail